

ৰামানুজনৰ গণিত

- ড০ নয়নদীপ ডেকা বৰুৱা, অধ্যাপক, গণিত বিভাগ, তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়

🕒 time to read: 10 minutes

(ৰামানুজনে গণিতৰ কেনেকুৱা নতুন ধাৰণা অৱতাৰণা কৰি গণিতৰ ক্ষেত্ৰখন প্ৰভাৱান্বিত কৰিছিল, সেই সম্পৰ্কীয় প্ৰৱন্ধলানিৰ এয়া প্ৰথমটি প্ৰৱন্ধৰ প্ৰথম খণ্ড)

ৰামানুজন আৰু পাই (খণ্ড-১)

যিকোনো বৃত্তৰ পৰিধি আৰু তাৰ ব্যাসৰ অনুপাতটো সদায় একে হয়, মানে ই এটা ধ্ৰুৱক (constant)। অৰ্থাৎ, বৃত্তটো সৰুৱেই হওক বা ডাঙৰেই হওক এই অনুপাতটোৰ কোনো হীন-দেড়ি নহয়। গণিতৰ এই প্ৰসিদ্ধ ধ্ৰুৱকটোক গ্ৰীক আখৰ π (পাই) ৰে বুজোৱা হয়। ৰামানুজনৰ পাই সম্পৰ্কীয় অভিনৱ আৱিষ্কাৰে সমস্ত ক্ষেত্ৰখনকেই বহুদূৰ আগুৱাই থৈ গ'ল বুলি ক'ব পাৰি। তেওঁৰ এই আৱিষ্কাৰৰ প্ৰকৃত মূল্য বুজিবলৈ তথা অন্তঃকৰণেৰে প্ৰশংসা কৰিবলৈ পাইৰ পূৰ্বৱৰ্তী কিছু ইতিহাস জানি লব লাগিব।

আশ্চৰ্যকৰভাৱে পাইৰ বিষয়ে আজি প্ৰায় চাৰিহেজাৰ বছৰ আগৰেপৰাই পৃথিৱীৰ বিভিন্ন প্ৰান্তত, বিভিন্ন সভ্যতাত গৱেষণা চলি আহিছে। প্ৰাচীন ইজিপ্ত আৰু বেবিলনত প্ৰায় চাৰিহেজাৰ বছৰ আগতে পাই সম্পৰ্কীয় গৱেষণা চলিছিল বুলি বিভিন্ন পেপাইৰাছ (papyrus) আৰু পংক তথা শৈলফলিৰ (clay and stone tablets) পাঠোদ্ধাৰৰদ্বাৰা জানিব পৰা গৈছে। প্ৰাচীন গ্ৰীক পণ্ডিতসকলে যিকোনো বৃত্তৰ পৰিধি আৰু ব্যাসৰ অনুপাত আৰু বৃত্তটোৰ কালি আৰু ব্যাসাৰ্ধৰ বৰ্গৰ অনুপাত দুটায়ে একে, মানে ধ্ৰুৱক, সেয়া অনুমান কৰিছিল। তেওঁলোকে আৰু অনুমান কৰিছিল যে এই ধ্ৰুৱকটোৰ মান তিনিতকৈ সামান্য বেছি। কিমানখিনি নো বেছি তাকেই জানিবলৈ, শুদ্ধ মানটো বাহিৰ কৰিবলৈ পৃথিৱীৰ বিভিন্ন প্ৰান্তত, বিভিন্নজনে, বিভিন্ন পদ্ধতিৰে কৰা চেষ্টাৰে পাইৰ ইতিহাস সমৃদ্ধ হৈ আছে। ইয়াত মাথো কেইটামান উদাহৰণহে উল্লেখ কৰা হ'ল। পাই সম্বন্ধীয় উল্লেখ বাইবেলত এনেদৰে পোৱা যায়। অ'ল্ড টেষ্টামেণ্টৰ 1 Kings 7:23 আৰু 2 Chronicles 4:2 ৰ এটা স্তম্ভকৰ উদ্ধৃতি আধুনিক ভাষাত এনেধৰণৰ

"And he made a molten sea, TEN CUBITS from brim to brim, round in compass, and five cubits the height thereof; and a line of THIRTY CUBITS did compass it round about."

উপৰিউক্ত স্তৱকৰপৰা বুজা যায় যে তেওঁ (ৰজা চলোমন) এনে এটা বিশাল বৃত্তাকাৰ মুখৰ পাত্ৰ সাজিছিল যাৰ ব্যাস আছিল 10 কিউবিট আৰু পৰিধি আছিল 30 কিউবিট। গতিকে পাইৰ মান পোৱা যায় $30/10=3$ । অৱশ্যে স্তৱকটোৰ কথাখিনিৰ অলপ বেলেগ ধৰণৰ ব্যাখ্যাৰ দ্বাৰা পিছলৈ পাইৰ মান 3 তকৈ সামান্য বেছি পোৱা যায় বুলি বাইবেলৰ বিশেষজ্ঞ কিছুমানে মন্তব্য কৰিছিল। যি কি নহওক পাইৰ সম্পৰ্কীয় চৰ্চায়ে বাইবেলে ঢুকি পোৱা কালতো হৈছিল সেয়া এই স্তৱকৰদ্বাৰাই প্ৰতীয়মান হয়।

আমাৰ ভাৰতবৰ্ষটো অতীজৰেপৰা পাই সম্পৰ্কীয় চৰ্চা হৈছিল বুলি জনা যায়। বিভিন্ন পূজাৰবাবে একে কালিৰ বৰ্গাকাৰ আৰু বৃত্তাকাৰ বেদী নিৰ্মাণ কৰাৰ প্ৰয়াসত প্ৰাচীন পণ্ডিত আৰু ঋষি-মুনিসকলে পাই সম্পৰ্কীয় গণনাৰে জড়িত হ'ব লগা হৈছিল। প্ৰাচীন শুল্কসূত্ৰকে আদি কৰি অন্য শ্লোকৰ ব্যাখ্যাই তেনে ইংগিত দিয়ে। পৰৱৰ্তীকালতো দ্বিতীয় ভাস্কৰাচাৰ্য্য, আৰ্য্যভট্ট আদি ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ সকলে যথেষ্ট পৰিপক্ক গণিতচৰ্চা কৰিছিল। বিশেষভাৱে, আৰ্য্যভট্টই তেওঁৰ আৰ্য্যভট্টীয় গ্ৰন্থৰ গণিতপাদ অধ্যায়ৰ দশম শ্লোকটোত লিখিছিল:

চতুৰধিকম শতমষ্টগুণম্ দ্বাষষ্টিস্তথা সহস্ৰানাম্।

অযুতদতদ্বয় বিষ্ণুসান্নো বৃত্ত পৰিণাহ:।।

ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল 4 ৰ অধিক 100, অৰ্থাৎ 104, ইয়াক 8 ৰে পূৰণ কৰি 62000 যোগ দিলে যি মান পোৱা যায় সেয়াই হ'ল 20000 একক পৰিমাণৰ ব্যাসযুক্ত বৃত্তৰ পৰিধিৰ আসন্ন মান। এই শ্লোকমতে পাইৰ আসন্নমান হ'ল

পৰিধি/ব্যাস

$$= ((100+4) \times 8 + 62000) / 20000$$

$$= (104 \times 8 + 62000) / 20000$$

$$= 62832 / 20000$$

$$= 3.1416 \text{ ।}$$

যিহেতু পাইৰ মান 3.141592653..., গতিকে আৰ্য্যভট্টৰ শ্লোকৰদ্বাৰা পাইৰ তিনি দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধমান 3.141 পোৱা যায়।

প্ৰাচীন চীনা, মেছোপটেমীয়া, মায়া সভ্যতাৰ সময়তো পাই সম্পৰ্কীয় গণনা, গৱেষণা আদি হৈছিল বুলি প্ৰমাণ পোৱা যায়। যদিও আদিতে বিভিন্নজনে পাইৰ শুদ্ধমান উলিওৱাৰ চেষ্টা কৰিছিল, গ্ৰীক গণিতজ্ঞ তথা বিজ্ঞানী আৰ্কিমিডিছৰ (Archimedes of Syracuse: 288–212 BC) এটা অভিনৱ পদ্ধতিয়েহে পাইৰ শুদ্ধমান উলিওৱাৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰথমবাৰৰ বাবে প্ৰকৃত ক্ষীপ্ৰতা প্ৰদান কৰিলে। আৰ্কিমিডিছে কেনে অভিনৱ আৱিষ্কাৰ কৰিছিল সেয়া চমুকৈ তলত দিয়া হ'ল।

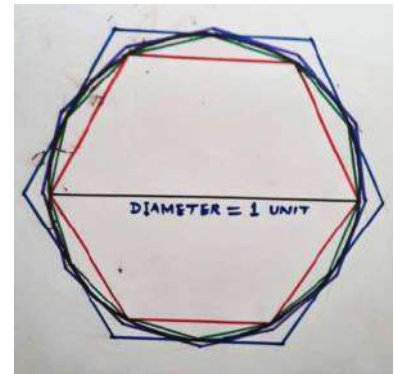
আৰ্কিমিডিছে এক একক ব্যাসযুক্ত বৃত্ত এটাৰ অন্তৰ্লিখিত (inscribed) আৰু পৰিগত (circumscribed) সুষম ষড়ভুজ (regular hexagon) দুটা বিবেচনা কৰিলে (সংলগ্ন ফটোখনৰ প্ৰথম চিত্ৰখনৰ ৰঙা আৰু নীলা ষড়ভুজ দুটা মন কৰক)। যিহেতু বৃত্তটোৰ ব্যাস 1, গতিকে বৃত্তৰ পৰিধি হ'ব পাইৰ সমান কাৰণ পৰিধি আৰু ব্যাসৰ অনুপাতেই হ'ল পাই। গতিকে আমি সহজে ক'ব পাৰোঁ যে পাইৰ মান অন্তৰ্লিখিত আৰু পৰিগত ষড়ভুজ দুটাৰ পৰিসীমাৰ জোখৰ মাজত থাকিব। এইয়ে পাইৰ মান অন্তৰ্লিখিত নাইবা পৰিগত ষড়ভুজৰ পৰিসীমাৰদ্বাৰা আসন্নকৰণ কৰিব পাৰি সেই কথাটো আৰ্কিমিডিছৰ আগতে অন্য গ্ৰীক আৰু চীনা গণিতজ্ঞয়ো কৰিছিল। কিন্তু অন্তৰ্লিখিত আৰু পৰিগত দুয়োফালৰপৰা আসন্নকৰণৰ ধাৰণাটো প্ৰথমে আৰ্কিমিডিছে দিছিল। অতি সহজে অন্তৰ্লিখিত আৰু পৰিগত সুষম ষড়ভুজ দুটাৰ পৰিসীমা ক্ৰমে 3 আৰু $2 \times (3\text{ৰ বৰ্গমূল})$ বুলি দেখুৱাব পাৰি। গতিকে পাইৰ মানটো সদায় 3 আৰু $2 \times (3\text{ৰ বৰ্গমূল})$ ৰ মাজত থাকে। এই কথাটো গাণিতিক ভাষাত লিখা হয় এনেদৰে,

$$3 < \pi < 2 \times (3 \text{ বর্গমূল})।$$

আৰ্কিমিডিছে আৰু এথোজ আগবাঢ়ি গৈ দেখুৱালে যে সুষম ষড়ভূজ কেইটাৰ বাহু সংখ্যা যদি দুগুণ কৰা যায়, অৰ্থাৎ অন্তৰ্লিখিত আৰু পৰিগত ষড়ভূজ দুটা যদি বাৰটা বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজলৈ, মানে দ্বাদশভূজলৈ, পৰিৱৰ্তন কৰা যায় তেন্তে সেই বহুভূজদুটাৰ পৰিসীমা দুটা পাইৰ মানৰ আৰু কাষ চাপি আহিব (সংলগ্ন ফটোখনৰ প্ৰথম চিত্ৰখনৰ সেউজীয়া আৰু বেঙুনীয়া ষড়ভূজ দুটা মন কৰক)। তদুপৰি আৰ্কিমিডিছে ইউক্লিডীয় জ্যামিতিৰ ধাৰণা প্ৰয়োগ কৰি ষড়ভূজৰ বাহুৰ জোখৰপৰা দ্বাদশভূজৰ বাহুৰ জোখ আসন্নকৰণ কৰাৰ উপায় এটা উলিয়ালে। একেই নিয়মেৰে তেওঁ দ্বাদশভূজৰপৰা চৌবিশটা বাহুবিশিষ্ট বহুভূজ আৰু চৌবিশটাৰপৰা আঠচল্লিশটা বাহুবিশিষ্ট বহুভূজৰ বাহুৰ জোখ উলিয়াব পৰা হ'ল। এই দ্বিগুণ কৰা পদ্ধতিটো আৰু এবাৰ খটুৱাই, অৰ্থাৎ আঠচল্লিশটাৰপৰা ছয়ানব্বৈটা বাহুবিশিষ্ট অন্তৰ্লিখিত আৰু পৰিগত সুষম বহুভূজৰ বাহুৰ জোখ আৰু পৰিসীমা উলিয়াই তেওঁ উপনীত হ'ল যে পাইৰ মান $223/7$ আৰু $22/7$ ৰ ভিতৰত থাকিব। অৰ্থাৎ পাইৰ মান $223/71$ তকৈ ডাঙৰ হ'ব আৰু $22/7$ তকৈ সৰু হ'ব। গণিতৰ ভাষাত

$$223/71 < \pi < 22/7।$$

যিহেতু $223/71=3.140845 \dots$ আৰু $22/7=3.142857 \dots$, গতিকে



$$3.140845 \dots < \pi < 3.142857 \dots।$$

যিহেতু উপৰিউক্ত অসমানতাৰ (inequality) বাহিৰৰ দুয়োটা মানৰে দুই দশমিক স্থানলৈ মান 3.14, গতিকে ভিতৰৰ ৰাশিটোৰ মানও অৰ্থাৎ পাইৰো দুই দশমিক স্থানলৈ মান 3.14 হ'বই। আৰ্কিমিডিছৰ এই পুনৰাবৃত্তিমূলক (iterative) পদ্ধতিটোৱে বহুল জনপ্ৰিয়তা লাভ কৰে। যদিও পদ্ধতিটো যথেষ্ট দীঘলীয়া আৰু কষ্টকৰ আছিল সপ্তদশ শতিকাত কলন গণিতৰ আৱিষ্কাৰৰ সময়লৈকে পাইৰ মান উলিওৱাৰ প্ৰায়বোৰ প্ৰয়াসেই এই

মাধৱ-গ্ৰেগৰী-লায়েবনীংজ

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, |x| \leq 1.$$

মাধৱ-লায়েবনীংজ

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

মেকিন

$$\begin{aligned} \pi &= 16 \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) \\ &= 16 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5^3 \times 3} + \frac{1}{5^5 \times 5} - \frac{1}{5^7 \times 7} + \dots \right) \\ &\quad - 4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{239^3 \times 3} + \frac{1}{239^5 \times 5} - \frac{1}{239^7 \times 7} + \dots \right). \end{aligned}$$

আৰ্কিমিডিছৰ পদ্ধতিৰে কৰা হৈছিল। উল্লেখযোগ্য যে আৰ্কিমিডিছৰ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি জাৰ্মানীৰ লুডল্ফ ফন চয়লেনে (Ludolph van Ceulen: 1540-1610) অশেষ পৰিশ্ৰমৰ অন্তত জীৱনৰ শেষ পৰ্যায়ত 35 দশমিক স্থানলৈ পাইৰ মান

উলিয়াইছিল। আৰ্কিমিডিছৰ পদ্ধতি তেওঁ অন্তৰ্লিখিত আৰু পৰিগত বৰ্গৰে (square) আৰম্ভ কৰি বাহুৰ সংখ্যা যাঠিগুণলৈ বৃদ্ধি কৰিছিল! সেই মানটো তেওঁৰ সমাধিস্তম্ভতো তেওঁৰ ইচ্ছানুযায়ী খোদিত কৰা হৈছিল যদিও কালক্ৰমত সেয়া হেৰাই গ'ল। পুনৰ 2000 চনত তেওঁৰ স্মৃতিত পয়ত্ৰিশ দশমিক স্থানলৈকে পাইৰ মানসহ এটি নতুন সমাধিস্তম্ভ গঢ়ি তোলা হয়।

সপ্তদশ শতিকাৰ দ্বিতীয়াৰ্ধত পাইৰ মান উলিওৱাৰ দ্বিতীয় পদ্ধতিটোৰ বিকাশ ঘটে। সমসাময়িকভাৱে গণিতজ্ঞ লায়েবনীংজ আৰু নিউটনে কলন গণিতৰো আৱিষ্কাৰ কৰে। গণিতজ্ঞ জেমছ গ্ৰেগৰীয়ে 1671 চনত সংলগ্ন ফটোখনৰ দ্বিতীয় চিত্ৰটোত দিয়া সূত্ৰটো আৱিষ্কাৰ কৰে আৰু সেই সূত্ৰত $x=1$ বহুৱাই 1674 চনত লায়েবনীংজে তৃতীয় চিত্ৰৰ পাইৰ সূত্ৰটো পালে। উল্লেখযোগ্য যে এই দুয়োটা সূত্ৰ আৰু আনুসংগিক আন কিছুমান সূত্ৰৰ আৱিষ্কাৰ প্ৰায় তিনিশ বছৰৰ আগতেই, চতুৰ্দশ আৰু পঞ্চদশ শতিকাৰ ভাৰতত, গণিতজ্ঞ মাধৱৰদ্বাৰা (Madhava of Sangamagrama: c. 1340– c. 1425) স্থাপিত আৰু পৰিচালিত কেৰালা জ্যোতিৰ্বিদ্যা আৰু গণিত টোলত (Kerala School of Astronomy and Mathematics) হৈছিল। টোলৰ পৰৱৰ্তীকালৰ সদস্য জ্যেষ্ঠদেৱ আৰু নীলকণ্ঠ সময়োজী প্ৰণিত গ্ৰন্থ ক্ৰমে যুক্তিৰাস আৰু তত্ত্বসংগ্ৰহত মাধৱৰ জ্যোতিৰ্বিদ্যা আৰু গাণিতিক গৱেষণাৰ বিশদ বিৱৰণ পোৱা যায়। পিছে শ্লোকসমূহ ভাৰতীয় ভাষাত, বিশেষকৈ সংস্কৃত আৰু মালয়ালম ভাষাত, লিখাৰবাবে বিশ্বৰ অন্য প্ৰান্তলৈ সেইবোৰৰ প্ৰচাৰ আৰু প্ৰসাৰ সময়মতে হোৱা নাছিল। আজিকালি মাধৱে কৰা কামৰ স্বীকৃতিস্বৰূপে গ্ৰেগৰী আৰু লায়েবনীংজৰ অসীম শ্ৰেণীদুটাক ক্ৰমে মাধৱ-গ্ৰেগৰী-লায়েবনীংজ আৰু মাধৱ-লায়েবনীংজ শ্ৰেণী বুলি কোৱা হয়।

মাধৱ-গ্ৰেগৰী-লায়েবনীৎজৰ অসীম শ্ৰেণীটো x ৰ পৰম মান (absolute value) যদি 1 ৰ সমান বা 1 তকৈ সৰু হয় তেনেহ'লে অভিসাৰী (convergent) হয়। এই শ্ৰেণীটোত x ৰ মান যদি 1 লোৱা যায়, তেন্তে মাধৱ-লায়েবনীৎজৰ অসীম শ্ৰেণীটো পোৱা যায় (ফটোৰ সূত্ৰ-২), যিটো পাইৰ এটা অসীম শ্ৰেণী। কিন্তু এইটো এটা বৰ ধীৰ গতিৰে পাইৰ মানৰ দিশে অভিসাৰী হোৱা শ্ৰেণী (slowly convergent)। প্ৰথম পঞ্চাছটা পদ যোগ কৰিলেহে পাইৰ এক দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধমান উলিয়াব পৰা যায়, মানে 3.1 লৈ। ঠিক তেনেকৈ প্ৰথম 500 টা আৰু 5000 টা পদ যোগ কৰিহে ক্ৰমে দুই আৰু তিনি দশমিক স্থানলৈ পাইৰ শুদ্ধমান, 3.14 আৰু 3.141, পাব পাৰি। মাধৱ-গ্ৰেগৰী-লায়েবনীৎজৰ অসীম শ্ৰেণীটোত x ৰ 1 তকৈ সৰু কিছুমান নিৰ্দিষ্ট মানৰবাবে মাধৱ-লায়েবনীৎজৰ শ্ৰেণীটোতকৈ অধিক গতিৰে পাইৰ দিশে অভিসাৰী হোৱা শ্ৰেণী কিছুমান পাব পাৰি। গণিতজ্ঞ আব্রাহাম শ্বাৰ্পে তেনেকুৱা এটা শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি, মাধৱ-গ্ৰেগৰী-লায়েবনীৎজৰ অসীম শ্ৰেণীটোত $x=1/(\text{square root of } 3)$ বহুৱাই, 71 দশমিক স্থানলৈ পাইৰ শুদ্ধমান উলিয়ায়। মাধৱ-গ্ৰেগৰী-লায়েবনীৎজৰ অসীম শ্ৰেণী আৰু ত্ৰিকোণমিতিৰ সহজ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি বৃটিছ গণিতজ্ঞ জন মেকিনে (John Machin: c 1686–1751) 1706 চনত সংলগ্ন ফটোখনৰ তিনি নম্বৰ সূত্ৰটো আৱিষ্কাৰ কৰে আৰু সেই সূত্ৰৰ সহায়ত 100 দশমিক স্থানলৈ পাইৰ শুদ্ধমান নিৰ্ণয় কৰে। উল্লেখনীয় যে মেকিনৰ সূত্ৰটোৰ অভিসৰণৰ হাৰ (rate of convergence) যথেষ্ট বেছি, আৰু সেয়েহে পৰৱৰ্তী কালৰ বহুতো পাই সম্পৰ্কীয় গণনাত সেইটো বহুলভাৱে ব্যৱহৃত হৈ আহিছে। মেকিনৰ 100 দশমিক স্থানলৈ পাইৰ শুদ্ধমান নিৰ্ণয় কৰা কথাটো লেখক উইলিয়াম জনছে (William Jones: 1675–1749) তেওঁৰ Synopsis Palmariorum Matheseos শীৰ্ষক কিতাপত বৰ্ণনা কৰিবলৈ গৈ পাইৰ বৰ্তমান ব্যৱহৃত চিহ্ন π প্ৰথমবাৰৰবাবে ব্যৱহাৰ কৰে। তাৰ আগলৈকে বৃত্তৰ পৰিধি আৰু ব্যাসৰ ধ্ৰুৱক অনুপাতটো বুজাবলৈ বিভিন্নজনে বিভিন্ন চিহ্ন ব্যৱহাৰ কৰি আহিছিল। অষ্টাদশ শতিকাৰ মধ্যভাগৰপৰা মহান গণিতজ্ঞ অয়লাৰৰদ্বাৰা চিহ্নটো বহুলভাৱে ব্যৱহৃত হয় আৰু তেতিয়াৰপৰাই ই স্থায়িত্ব লাভ কৰে।

এইখিনিতে পাই সম্পৰ্কীয় আৰু এটা দৰকাৰী কথা জনাই থওঁ। যিকোনো পৰিমেয় সংখ্যাক দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে সেই প্ৰকাশটো সদায় সসীম (finite) নাইবা অসীম পুনঃপৌনিক (infinite recurring) দশমিক হ'ব। উদাহৰণস্বৰূপে, $1/2$ ক আমি 0.5 হিচাবে দশমিকত প্ৰকাশ কৰিব পাৰো, যিটো হ'ল সসীম দশমিক। ঠিক তেনেকৈ $1/4$ ক 0.25, $3/4$ ক 0.75, ইত্যাদি। আনহাতে $1/3$ ক দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে হ'ব 0.333333...। আৰু এইটো হ'ল এটা অসীম প্ৰকাশ, কিন্তু ই পুনঃপৌনিক, কাৰণ দশমিকৰ পিছৰ 3 টো পুনঃ পুনঃ ওলায়েই থাকিব। ঠিক একেদৰে, $22/7$ ক দশমিকত প্ৰকাশ কৰিলে আমি পাওঁ

22/7

=3.142857 142857 142857 ... ।

এই ক্ষেত্ৰত 142857, এই অংশটো পুনঃপৌনিক। সংখ্যা এটা যদি পৰিমেয় নহয়, মানে যদি অপৰিমেয় (Irrational number) হয়, তেন্তে তাৰ দশমিক প্ৰকাশটো কেতিয়াও পুনঃপৌনিক হ'ব নোৱাৰে। 1767 চনত গণিতজ্ঞ লেম্বাৰ্টে প্ৰমাণ কৰিলে যে পাই এটা অপৰিমেয় সংখ্যা। গতিকে ইয়াক দশমিক সংখ্যাত প্ৰকাশ কৰিলে ই এটা অসীম অপুনঃপৌনিক প্ৰকাশহে (infinite non-recurring decimal expansion) হ'ব। এই অপুনঃপৌনিক পাইৰ মানটো হ'ল

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208
9986280348253421170679... ..।

মাধৱ-গ্ৰেগৰী-লায়েবনীৎজৰ অসীম শ্ৰেণী আৰু মেকিন তথা মেকিন-সদৃশ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি পাইৰ মান আৰু বেছি দশমিক স্থানলৈ গণনা কৰাৰ ধাৰাটো 1980 চনমানলৈ চলি থাকে। তদুপৰি 1945 চনলৈ নানা ধৰণৰ মেকানিকেল কেলকুলেটৰ আৰু 1947 চনত সাজি উলিওৱা প্ৰথমটো ইলেক্ট্ৰনিক কম্পিউটাৰে গণনাৰ গতি অধিক ক্ষীপ্ৰতৰ কৰি তুলিলে। উদাহৰণস্বৰূপে, 1945 চনত ডি এফ ফাৰগুচনে মেকিনৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি নিজে সাজি উলিওৱা মেকানিক কেলকুলেটৰত পাইৰ 808 দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধমান উলিয়ালে। বিশ্বৰ প্ৰথমটো কম্পিউটাৰ ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Calculator) ব্যৱহাৰ কৰি জন ফন নয়মান, নিকোলাছ মেট্ৰোপলিছ আৰু জৰ্জ ৰাইটৱাইজনাৰে (John von Neumann, Nicolas Metropolis, George Reitwisner) মেকিনৰ সূত্ৰৰ প্ৰয়োগেৰে 2037 দশমিক স্থানলৈ পাইৰ মান উলিয়াবলৈ সক্ষম হ'ল। তাৰ পিছত যিমানেই নতুন নতুন উন্নত আৰ্হিৰ কম্পিউটাৰ আহিল সিমানেই পাইৰ দশমিক স্থানৰ অংকবোৰো বাঢ়ি গৈ থাকিল। এনেকুৱা হ'লগৈ যে নতুনকৈ সাজি উলিওৱা কম্পিউটাৰ এটানো ইতিমধ্যে উপলব্ধবোৰতকৈ ক্ষীপ্ৰ হয়নে নহয় তুলনা কৰিবলৈ পাইৰ মান বেছি দশমিক স্থানলৈ উলিয়াব পাৰেনে নোৱাৰে সেইটোৰে পৰীক্ষা কৰা হ'ল। পদ্ধতি কিন্তু একেই থাকিল, মাধৱ-গ্ৰেগৰী-লায়েবনীৎজৰ অসীম শ্ৰেণী আৰু মেকিন নাইবা মেকিন-সদৃশ সূত্ৰসমূহ। ফ্ৰান্সৰ কম্পিউটাৰ বিজ্ঞানী জাঁ গীউ (Jean Guilloud) আৰু মাৰ্টিন বুয়ে (Martin Bouyer) CDC 7600 কম্পিউটাৰ ব্যৱহাৰ কৰি 1973 চনত 1,001,250 দশমিক স্থানলৈ আৰু কাজুনৰি মিয়োশী (Kazunori Miyoshi) আৰু য়াছুমাচা কানাডাই (Yasumasa Kanada) FACOM M 200 কম্পিউটাৰ ব্যৱহাৰ কৰি 1981 চনত 2,000,036 দশমিক স্থানলৈ পাইৰ মান উলিয়ায়।

এইয়ে এক মিলিয়নৰপৰা দুই মিলিয়ন দশমিক স্থান পাওঁতে প্ৰায় আঠ বছৰ লাগিল, সেইটোৱে কিছু পৰিমাণে মাধৱ-গ্ৰেগৰী-লায়েবনীৎজৰ অসীম শ্ৰেণী আৰু মেকিন-সদৃশ সূত্ৰসমূহৰ সীমাৱদ্ধতাও সূচায়। কিন্তু সৌভাগ্যবশতঃ ইয়াৰ মাজৰ সময়খিনিতে পাই সম্পৰ্কীয় এটা অভিনৱ ধাৰণাৰ আগমন হয়, যিটো মহান গণিতজ্ঞ কাৰ্ল ফ্ৰেডেৰিখ

গাউছেও (Carl Fredrich Gauss: 1777–1855) নিজৰ ডায়েৰীৰ পাতত লিপিবদ্ধ কৰিছিল মাথোঁ 14 বছৰ
বয়সত! সেয়া আৰু ৰামানুজনৰ পাই সম্পৰ্কীয় কাম দ্বিতীয় খণ্ডলৈ থলো।