

ৰামানুজনৰ গণিত-১

নয়নদীপ ডেকা বৰুৱা, তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়

ৰামানুজনৰ বিষয়ে সম্যক ধাৰণা এটা মই যোৱাবছৰৰ ৯ আগষ্ট তাৰিখে এটা পোষ্টত উল্লেখ কৰিছিলো। ৰামানুজনক সৰ্বকালৰে এজন মহান গণিতজ্ঞ বুলি গণ্য কৰা হয়। ৰামানুজনে নো কেনে ধৰণৰ গণিতৰ সমস্যা সমাধান কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিছিল, তেওঁৰ গণিতে কেনেকৈ পিছলৈ গণিতৰ ক্ষেত্ৰখন প্ৰভাৱিত কৰিছিল, তাকেই সাধাৰণ পাঠকৰ জ্ঞাতাৰ্থে এলানি প্ৰৱন্ধৰ যোগেদি জনাবলৈ চেষ্টা কৰিছোঁ। এইলানি প্ৰৱন্ধৰ প্ৰথমটো আজি আগবঢ়ালো। সাম্প্ৰতিক দুৰ্যোগৰ বাবে ঘৰতে কাম কৰিবলৈ সুবিধা পোৱা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে বিষয়টোৰ ওপৰত আৰু অধিক পঢ়ি শিকিবলৈ আগ্ৰহী হ'ব বুলিয়েই এই প্ৰয়াস।

ৰামানুজন আৰু সাৰ্বজনীন দ্বিঘাত ৰূপ (Universal Quadratic Forms)

আমি জানো যে 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ইত্যাদি পূৰ্ণবৰ্গ সংখ্যা, যিহেতু

$0=0 \times 0=0^2$, $1=1 \times 1=1^2$, $4=2 \times 2=2^2$, $9=3 \times 3=3^2$, $16=4 \times 4=4^2$, $25=5 \times 5=5^2$, $36=6 \times 6=6^2$, ইত্যাদি। প্ৰশ্ন হ'ল, যিকোনো অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যাক, অৰ্থাৎ স্বাভাৱিক সংখ্যাক, এই পূৰ্ণবৰ্গবোৰৰ যোগফল হিচাবে আমি প্ৰকাশ কৰিব পাৰোনে কি? প্ৰথমেই মন কৰোঁ যে 1 আৰু 2 ক দুটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফলৰ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, যথা $1=1^2+0^2$ আৰু $2=1^2+1^2$ । ঠিক তেনেকৈ $4=2^2+0^2$, $5=1^2+2^2$ আৰু $8=2^2+2^2$ । কিন্তু 3, 6, 7 আদি কিছুমান স্বাভাৱিক সংখ্যাক দুটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফলৰ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। গতিকে আমি দেখিলো যে সকলোবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাক দুটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফলৰ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। আকৌ মন কৰোঁ যে যিবোৰ সংখ্যাক দুটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি সেইবোৰক তিনিটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফল হিচাবেও প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, আগৰ যোগফলৰ লগত 0 এটা যোগ কৰিলেই হ'ল। যথা,

$$1=1^2+0^2+0^2,$$

$$2=1^2+1^2+0^2,$$

$$4=2^2+0^2+0^2,$$

$$5=1^2+2^2+0^2,$$

$$8=2^2+2^2+0^2, \text{ ইত্যাদি।}$$

তদোপৰি 3 আৰু 6 ক যদিও দুটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি কিন্তু তিনিটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, যথা $3=1^2+1^2+1^2$ আৰু

$$6=1^2+1^2+2^2।$$

কিন্তু 7 ক তিনিটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। ঠিক তেনেকৈ 15, 23, 28, আদি কিছুমান সংখ্যাকো তিনিটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। অৰ্থাৎ আমি লক্ষ্য কৰিলো যে সকলোবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাক তিনিটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফলৰ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। আনহাতে পূৰ্ণবৰ্গৰ সংখ্যা যদি চাৰিটালৈ বঢ়াই দিয়া হয় তেন্তে অৱস্থাৰ বৃহৎ পৰিবৰ্তন হয়। গণিতজ্ঞ লাগ্ৰাঞ্জ 1770 চনত প্ৰমাণ কৰিলে যে সকলোবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাকেই চাৰিটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, তিনিটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফলৰ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰা 7, 15, 23, আদি সংখ্যাবোৰকো আমি চাৰিটা পূৰ্ণবৰ্গৰ যোগফলৰ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰোঁ; $7=2^2+1^2+1^2+1^2$,

$$15=3^2+2^2+1^2+1^2,$$

$$23=3^2+3^2+2^2+1^2, \text{ ইত্যাদি।}$$

গতিকে আমি লাগ্ৰাঞ্জৰ প্ৰমাণৰদ্বাৰা গম পালো যে যদিও সকলোবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাক x^2 , x^2+y^2 , অথবা $x^2+y^2+z^2$ (য'ত x, y, z অখণ্ড সংখ্যা) ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি, কিন্তু যিকোনো স্বাভাৱিক সংখ্যাকেই $x^2+y^2+z^2+w^2$

ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। এই

$$x^2,$$

$$x^2+y^2,$$

$$x^2+y^2+z^2,$$

$$x^2+y^2+z^2+w^2,$$

আদি ৰূপবোৰক দ্বিঘাত ৰূপ (quadratic form) বুলি কোৱা হয়। দুটা চলক বিশিষ্ট (চলক দুটা x আৰু y বুলি ধৰিলে) অখণ্ড দ্বিঘাত ৰূপৰ (Integral quadratic form) সাধাৰণ ধৰণটো হ'ল $ax^2+bxy+cy^2$, য'ত a, b আৰু c হ'ল অখণ্ড সংখ্যা (x^2, xy, y^2 আদি ৰাশিবোৰৰ ঘাত দুই, সেয়েহে দ্বিঘাত)। ঠিক তেনেকৈ তিনিটা চলক বিশিষ্ট অখণ্ড দ্বিঘাত ৰূপৰ সাধাৰণ ধৰণটো হ'ল $ax^2+by^2+cz^2+dx+fy+gz$, য'ত a, b, c, d, f আৰু g হ'ল অখণ্ড সংখ্যা। যি দ্বিঘাত ৰূপে সকলোবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাক সামৰি লয় তেনেকুৱা দ্বিঘাত ৰূপক সাৰ্বজনীন দ্বিঘাত ৰূপ (universal quadratic form) বুলি কোৱা হয়। আমি ইতিমধ্যে দেখিলো যে সকলোবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাই $x^2+y^2+z^2+w^2$ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। গতিকে $x^2+y^2+z^2+w^2$ হ'ল এটা সাৰ্বজনীন দ্বিঘাত ৰূপ। কিন্তু $x^2, x^2+y^2, x^2+y^2+z^2$ সাৰ্বজনীন নহয়, কিয়নো এইবোৰ দ্বিঘাত ৰূপে সকলোবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাক সামৰি নলয়। এতিয়া আৰু এটা কথা মন কৰা যাওক। দ্বিঘাত ৰূপ $x^2+y^2+z^2+w^2$ ক সংলগ্ন ফটোখনৰ সূত্ৰ-১ ত দেখুৱাৰ দৰে মৌলকক্ষৰ (matrix) ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰো, য'ত মৌলকক্ষৰ মৌলবোৰ (elements) হ'ল অখণ্ড সংখ্যা। অৰ্থাৎ, এই দ্বিঘাত ৰূপটো এটা 4×4 বৰ্গ মৌলকক্ষৰ (square matrix) সমতুল্য যাৰ কৰ্ণৰ মৌলবোৰৰ বাহিৰে বাকীবোৰ মৌলৰ মান শূন্য। এনেধৰণৰ মৌলকক্ষক বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ (diagonal matrix) বুলি কোৱা হয়। ৰামানুজনে 1916 চনত প্ৰকাশিত এখন গৱেষণাপত্ৰত এনে বিকৰ্ণ মৌলকক্ষৰ সমতুল্য 55টা সাৰ্বজনীন দ্বিঘাত ৰূপ প্ৰকাশ কৰিলে। পিছলৈ প্ৰমাণিত হ'ল যে তেনেধৰণৰ সাৰ্বজনীন দ্বিঘাত ৰূপৰ সংখ্যা আচলতে মুঠ 54 টা, ৰামানুজনে উল্লেখ কৰিছিল 55 টা। দ্বিঘাত ৰূপ $x^2+2y^2+5z^2+5w^2$ টোক বাদ দি বাকী আটাইকেইটা সাৰ্বজনীন ৰূপ ৰামানুজনে শুদ্ধকৈ নিৰূপণ কৰিছিল। উল্লেখনীয় যে দ্বিঘাত ৰূপ $x^2+2y^2+5z^2+5w^2$ টো সাৰ্বজনীন নহয়, কাৰণ 15 ক $x^2+2y^2+5z^2+5w^2$ হিচাবে কেতিয়াও প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি, x, y, z আৰু w যি অখণ্ড সংখ্যাই নহওক কিয় (পাঠকে সত্যাপন কৰি চাব পাৰে)। ৰামানুজনেৰে প্ৰকাশিত দ্বিঘাত ৰূপকেইটাই সুদূৰপ্ৰসাৰী অধ্যয়নৰ বাট মুকলি কৰিলে। ধৰা হওক, ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $a, b, c, d, f, g, h, k, l, m$, ৰ বাবে $ax^2+by^2+cz^2+dw^2+fx+gy+hz+lx+my+nz+pw+qz+rx+sy+tz+u$

দ্বিঘাত ৰূপটো মৌলকক্ষত প্ৰকাশ কৰোঁতে সংশ্লিষ্ট 4×4 সাৰণিটোৰ মৌলবোৰ অখণ্ড সংখ্যা পালো। সংলগ্ন ফটোখনৰ সূত্ৰ-২ ত তেনেধৰণৰ দ্বিঘাত ৰূপ $x^2+2y^2+2z^2+3w^2+2yz+2zw$ টো উদাহৰণ হিচাবে দিয়া হৈছে। মন কৰিবলগীয়া যে f, g, h, k, l আৰু m আটাইবোৰ শূন্য হ'লে আমি

এটা বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ পাওঁ যাৰ বিকৰ্ণ মৌলবোৰ (diagonal elements) a, b, c, d আৰু তেনে দ্বিঘাত ৰূপবোৰৰ সাৰ্বজনীনতা ৰামানুজনে অধ্যয়ন কৰি মুঠ 55টা পাইছিল বুলি ইতিমধ্যে উল্লেখ কৰি অহা হৈছে। জন হৰ্টন কনৰে আৰু উইলিয়াম এলান শ্লীবাৰ্গে 1993 চনত প্ৰমাণ কৰিলে যে অখণ্ড মৌলযুক্ত মৌলকক্ষৰ সমতুল্য দ্বিঘাত ৰূপ এটা সাৰ্বজনীন হ'ব যদিহে 1 ৰপৰা 15 লৈকে সাভাৰিক সংখ্যাবোৰক সেই ৰূপটোত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। এই উপপাদ্যক "পঞ্চদশ উপপাদ্য" (The fifteen theorem) বুলি কোৱা হয়। এই উপপাদ্যই এটা দ্বিঘাত ৰূপ সাৰ্বজনীন হয়নে নহয় তাক পৰীক্ষা কৰাটো সহজ কৰি তুলিলে। উদাহৰণস্বৰূপে, যদিহে আমি $x^2+2y^2+2z^2+3w^2+2yz+2zw$ দ্বিঘাত ৰূপটো সাৰ্বজনীন হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰিব লাগে তেনেহ'লে 1, 2, 3, ..., 15 ক $x^2+2y^2+2z^2+3w^2+2yz+2zw$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰিব পাৰিনে নোৱাৰি সেয়া চালেই হ'ব। উপৰিউক্ত দ্বিঘাত ৰূপটোত যিহেতু 1, 2, 3, ..., 15 ক প্ৰকাশ কৰিব পাৰি (পাঠকে সত্যাপন কৰি চাব পাৰে), গতিকে $x^2+2y^2+2z^2+3w^2+2yz+2zw$

দ্বিঘাত ৰূপটো সাৰ্বজনীন। আমেৰিকাৰ ভাৰতীয় মূলৰ প্ৰখ্যাত গণিতজ্ঞ মঞ্জুল ভাৰ্গৱে 1999 চনত কনৰে আৰু শ্লীবাৰ্গৰ পঞ্চদশ উপপাদ্যটোৰ এটি সহজ আৰু আমোদজনক প্ৰমাণ আগবঢ়ালে। তেওঁ দেখুৱালে যে অখণ্ড মৌলযুক্ত মৌলকক্ষৰ সমতুল্য দ্বিঘাত ৰূপ এটা সাৰ্বজনীন হ'ব যদিহে 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14 আৰু 15, এই নটা সংখ্যাক সেই ৰূপটোত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। আৱিষ্কৃত অভিনৱ তত্ত্বৰ ভিত্তিত ভাৰ্গৱে আৰু প্ৰমাণ কৰিলে যে অখণ্ড মৌলযুক্ত মৌলকক্ষৰ সমতুল্য সাৰ্বজনীন দ্বিঘাত ৰূপৰ মুঠ সংখ্যা 204 টা, যাৰ মাজত ৰামানুজনৰ দ্বাৰা আৱিষ্কৃত অখণ্ড মৌলযুক্ত বিকৰ্ণ মৌলকক্ষৰ সমতুল্য 54টা সাৰ্বজনীন দ্বিঘাত ৰূপো সোমাই আছে। ৰামানুজনে 1916 চনত অধ্যয়ন কৰা সুন্দৰ বিষয় এটাই মঞ্জুল ভাৰ্গৱৰ অভিনৱ পৰশত পূৰ্ণতা লাভ কৰিলে।

মঞ্জুল ভাৰ্গৱৰ দ্বিঘাত ৰূপৰ অধ্যয়ন কিন্তু পঞ্চদশ উপপাদ্যৰ প্ৰমাণতেই থমকি নৰ'ল। তেওঁ জনাথন হেংকৰ সৈতে যুটীয়াভাৱে কনৰে 1993 চনত আগবঢ়োৱা দ্বিঘাত ৰূপৰ "290 অনমান" (290 Conjecture) ও প্ৰমাণ কৰে। এই 290 অনুমানটোনো কি জানিবলৈ প্ৰথমে আমি দ্বিঘাত ৰূপৰ আৰু এটা কথা জানি লওঁ। কিছুমান দ্বিঘাত ৰূপৰ সমতুল্য মৌলকক্ষটোৰ মৌলবোৰ অখণ্ড সংখ্যা নহ'বও পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, x^2+xy+y^2 দ্বিঘাত ৰূপটোৰ দুয়োটা বিকৰ্ণ মৌলই 1 যদিও অবিকৰ্ণ (non-diagonal) মৌল দুয়োটাই কিন্তু $1/2$ হে। ঠিক একেদৰে সংলগ্ন ফটোখনৰ সূত্ৰ-৩ ত দিয়া $x^2+y^2+z^2+w^2+xy+xz+xw+yz+yw+zw$ দ্বিঘাত ৰূপটোৰ সমতুল্য মৌলকক্ষটোৰ

মৌলবোৰো কেৱল অখণ্ড নহয়। প্ৰশ্ন হ'ল, এনেধৰণৰ কোনবোৰ দ্বিঘাত ৰূপ সাৰ্বজনীন হ'ব পাৰে। অৰ্থাৎ, কোনবোৰ দ্বিঘাত ৰূপে সকলোবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাক সামৰি ল'ব। সাংখ্যিক তথ্যৰদ্বাৰা কন্‌ৱে অনুমান কৰিলে যে এটা দ্বিঘাত ৰূপ সাৰ্বজনীন হয়নে নহয় জানিবলৈ কেৱল নিৰ্দিষ্ট 29 টা সংখ্যা সেই ৰূপটোৱে সামৰি লৈছেনে নাই পৰীক্ষা কৰিলেই যথেষ্ট। সেই সংখ্যা 29 টা হ'ল 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 42, 58, 93, 110, 145, 203, আৰু 290। এই অনুমানটোকেই ভাৰ্গৱ আৰু হেংকে প্ৰমাণ কৰিলে। তেওঁলোকে আৰু প্ৰমাণ কৰিলে যে সাৰ্বজনীন দ্বিঘাত ৰূপৰ মুঠ সংখ্যা হ'ল 6436 টা! এনেকৈয়ে ৰামানুজনে অধ্যয়ন কৰা আমোদজনক বিষয় এটাৰ নব্বৈ বছৰৰ অন্তত সফল পৰিসমাপ্তি ঘটিল (অখণ্ড সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত)! বেলেগ দিশলৈ উপপাদ্যবোৰ সম্প্ৰসাৰিত কৰাৰ নতুন বাটো মুকলি হ'ল।

উপৰিউক্ত বিষয়টো, উপপাদ্যবোৰ প্ৰমাণ কৰা পদ্ধতিবোৰ বিতংভাৱে জানিবলৈ আগ্ৰহী পাঠকে তলত উল্লেখ কৰা গৱেষণাপত্ৰকেইখন পঢ়িব পাৰে।

1. Srinivasa Ramanujan (1916), "On the expression of a number in the form $ax^2+by^2+cz^2+dw^2$," Proceedings of the Cambridge Philosophical Society , Vol. 19, pp. 11-- 21.
2. Jonathan Horton Conway (2000), "Universal quadratic forms and the fifteen theorem", in Quadratic forms and their applications (Dublin, 1999), Contemporary Mathematics, Vol. 272, pp. 23--26, American Mathematics Society, Providence RI.
2. Manjul Bhargava (2000), "On the Conway–Schneeberger fifteen theorem". Quadratic forms and their applications (Dublin, 1999), Contemporary Mathathematics, Vol. 272, pp. 27--37, Americam Mathematical Society, Providence, RI.
3. Manjul Bhargava and Jonathan Hanke (2005), Universal quadratic forms and the 290 theorem. Invent. Math. (Preprint is freely available in other sources).